

Die Energiebilanz eines Wasserstoffbogens in axialem Magnetfeld

UDO HEIDRICH

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforschg. **20 a**, 475—484 [1965]; eingegangen am 24. Dezember 1964)

The numerical solution of the energy balance of a cylindrically symmetric hydrogen arc immersed in an axial, strong, homogeneous magnetic field led to the current-voltage-characteristic and the radial temperature distribution. Three types of arc models were used, each with different assumptions on radiation losses. The results show that, by the reduction of the thermal conductivity perpendicular to the magnetic field for a fully ionized plasma, the necessary electrical power is diminished for temperatures along the axis higher than about $2 \cdot 10^4$ °K. For example, an arc with 1 cm radius in a hydrogen atmosphere of $5 \cdot 10^4$ dyne/cm², in an external magnetic field of 20 kGauss, a temperature along the axis of 10^5 °K requires about 3.5 kW per cm arc length. Of this, radiation losses account for about 0.5 kW per cm. However, without a superimposed magnetic field the electrical power is about 200 kW per cm.

Bekanntlich steigt der Verbrauch an elektrischer Leistung eines üblichen Lichtbogens mit wachsender Achsentemperatur stark an¹. Die notwendige hohe Leistung ist vor allem auf die starke Zunahme der Wärmeleitfähigkeit α für ein vollionisiertes Plasma mit der Temperatur ($\alpha \sim T^{5/2}$) zurückzuführen. Wird dem Bogen nun in axialer Richtung ein starkes homogenes Magnetfeld überlagert, so tritt eine bedeutende Reduzierung der Wärmeleitfähigkeit senkrecht zum Magnetfeld ein (vgl. Abb. 1). Dadurch wird die Erreichung sehr hoher Achsentemperaturen mit relativ geringen Leistungen möglich, was im folgenden gezeigt werden soll. Das Magnetfeld hat aber außer der Reduktion der Wärmeleitfähigkeit noch einen zweiten Einfluß auf die Lichtbogensäule. Im Temperaturgebiet der teilweisen Ionisation ergeben sich stationäre Diffusionsströme von neutralen Atomen in Richtung steigender Temperatur und von Elektronen und Ionen in entgegengesetzter Richtung. Überlagert man ein axiales Magnetfeld, so wirkt auf die Diffusion der geladenen Teilchen eine hemmende Kraft, die durch einen sich einstellenden Druckgradienten ausgeglichen wird. Dadurch entsteht eine Druckdifferenz zwischen den äußeren kalten Bereichen des Bogens und seinem heißen Kern² (vgl. Abb. 2). Ist im Inneren des Wasserstoffbogens volle Ionisation erreicht, so stellt sich dort wieder ein konstanter Gesamtdruck ein. Die Beeinflussung der Diffusionsströme durch das Magnetfeld hat auch einen Einfluß auf die mit der Diffusion verbundene Reaktionswärmeleitfähigkeit zur Folge³, was ebenfalls berücksichtigt werden muß.

Für den zu berechnenden Lichtbogen sollen folgende Voraussetzungen gemacht werden:

1. Der Bogen soll stationär betrieben werden.
2. Er soll Zylindersymmetrie besitzen.
3. Die Schwerpunktgeschwindigkeit des Bogenplasmas ist verschwindend klein.
4. Ein elektrischer Strom fließt nur in Achsenrichtung. Seine Flächendichte ist durch das Ohmsche Gesetz bestimmt: $j = \sigma E$; E = elektrische Feldstärke, σ = elektrische Leitfähigkeit.
5. Überall im Bogen ist lokales thermisches Gleichgewicht vorhanden; die SAHA-Gleichung bestimmt den Ionisationsgrad.
6. Der Gesamtdruck im Plasma ist vom angelegten Magnetfeld B_z und vom Außendruck p_A abhängig².
7. Für die numerischen Rechnungen wird Wasserstoff mit einem Außendruck $p_A = 5 \cdot 10^4$ dyn/cm² und einer magnetischen Induktion von $B_z = 20$ kT zugrunde gelegt.

Unter diesen Voraussetzungen lautet dann die Bilanz der pro Zeit- und Volumeneinheit umgesetzten Energie:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \alpha(T) \frac{dT}{dr} + \sigma(T) E^2 + \text{Rad}(T) = 0. \quad (1)$$

Der erste Term stellt den Verlust durch Wärmeleitung sowie durch Konvektion von Teilchenenthalpie dar, dementsprechend ist unter $\alpha(T)$ die Summe von normaler Wärmeleitfähigkeit (ohne Massentransport) α_N und sogenannter Reaktionswärmeleit-

¹ H. MAECKER, Z. Phys. **157**, 1 [1959].

² R. WIENECKE, Z. Naturforschg. **18 a**, 1151 [1963].

³ R. WIENECKE, Z. Naturforschg. **19 a**, 675 [1964].



fähigkeit α_R zu verstehen³. Der zweite Term bedeutet die zugeführte Joulsche oder Ohmsche Wärme und der dritte den Energieverlust bzw. -gewinn durch Strahlung.

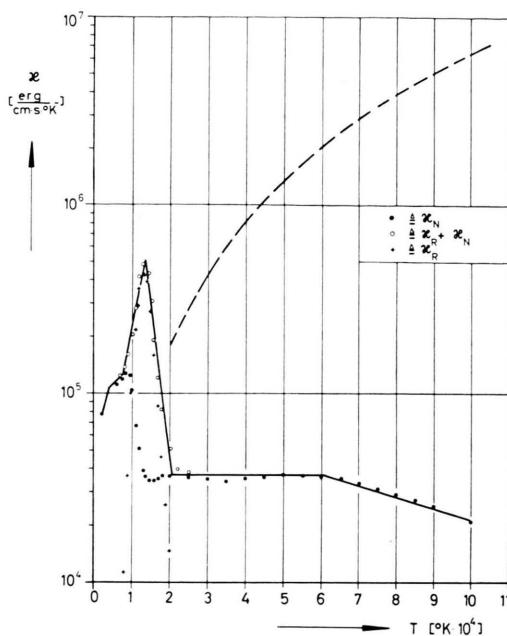


Abb. 1. Normale (α_N) und Reaktionswärmeleitfähigkeit (α_R) von Wasserstoff senkrecht zum Magnetfeld. Außendruck $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$, $B_z = 20 \text{ kG}$. Zum Vergleich α_N für vollionisiertes Plasma ohne Magnetfeld (— — —).

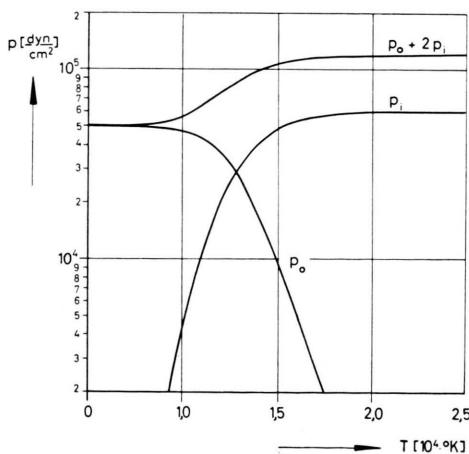


Abb. 2. Druckerhöhung in der Bogensäule durch Überlagerung eines Magnetfeldes. $B_z = 20 \text{ kG}$; p_0 = Neutralgasdruck, p_e = Elektronen-, p_i = Ionendruck.

I. Wärmeleitfähigkeit α und elektrische Leitfähigkeit σ von Wasserstoff

Die Integration der Gl. (1) setzt eine Kenntnis der beiden „Materialfunktionen“ σ und α voraus.

Für die elektrische Leitfähigkeit benutzen wir für sehr schwache Ionisation den von MAECKER¹ angegebenen Ausdruck:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{3/4}}{\sqrt{3}} \frac{e^2 m_e^{1/4}}{h^{3/2} Q_{e0}} \cdot \frac{(kT)^{3/4}}{\sqrt{p}} \exp \left\{ -\frac{E_i}{2kT} \right\} [\text{cm}^{-1}],$$

Q_{e0} = Wirkungsquerschnitt für den Stoß Elektron-Atom, E_i = Ionisierungsenergie des Atoms.

Im Bereich zwischen sehr schwacher und starker Ionisation setzen wir:

$$\sigma = \frac{e^2 (n_i + n_e)}{n_0 Q_{e0} + (n_i + n_e) Q_{ie}} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2kT m_e}} [\text{cm}^{-1}], \quad (2)$$

(Q_{ie} = COULOMB-Querschnitt),

was nach⁴ allgemein gültig ist.

Zur Berechnung von σ für das vollionisierte Plasma nehmen wir den von SPITZER⁵ angegebenen Wert:

$$\sigma = 1,38 \cdot 10^8 T^{3/2} / \ln A [\text{cm}^{-1}]. \quad (3)$$

Da Gl. (2) für ein vollionisiertes Plasma nicht in die zuverlässige Gl. (3) übergeht, wird Gl. (2) mit einem Korrekturfaktor versehen, der diesen Übergang gewährleistet.

Die Wärmeleitfähigkeit senkrecht zum Magnetfeld setzt sich aus der Summe der Wärmeleitfähigkeit ohne Massenströme α_N und der Reaktionswärmeleitfähigkeit α_R , die vor allem durch den Transport von Ionisationsenergie bedingt ist, zusammen:

$$\alpha = \alpha_N + \alpha_R.$$

Bei schwacher Ionisation kann α_N für Neutralgas benutzt werden¹:

$$\alpha_N = \frac{3k}{2\sqrt{2}Q_{00}} v_0, \quad v_0 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}.$$

In diesem Bereich kann die Reaktionswärmeleitfähigkeit vernachlässigt werden.

Im Bereich zwischen schwacher und voller Ionisation dagegen dominiert α_R . Nach² ergibt sich der für alle Temperaturen gültige Ausdruck:

$$\alpha_R = \frac{1}{1+A} \frac{dp_i}{dT} \frac{(kT + 8,68 \cdot 10^{-12}) V/kT}{(p_i + p_0) 2,88 \cdot 10^{-27}} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm} \cdot \text{grd} \cdot \text{sec}} \right]$$

⁴ W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, Elektrische Bögen und thermisches Plasma, Handbuch der Physik, Bd. XXII, S. 346, Verlag Springer, Berlin 1956.

⁵ L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York 1956.

$$\text{mit } A = \frac{e^2 B_z^2 (k T)^2}{(p_0 + p_i) [p_i \varepsilon_{ie} (\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0}) + p_0 \varepsilon_{i0} \varepsilon_{e0}]} ;$$

ε_{ie} , ε_{i0} , ε_{e0} bedeuten hier die von SCHLÜTER⁶ eingeführten Reibungskoeffizienten, die allgemein in folgender Form geschrieben werden können

$$\varepsilon_{12} = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2 k T}{\pi}} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} Q_{12} = \varepsilon_{21} .$$

Die normale Wärmeleitfähigkeit α_N senkrecht zum Magnetfeld für teil- und vollionisiertes Plasma wurde⁷ entnommen. α_N ist die Summe der Elektronen-, Ionen- und Neutralatomleitfähigkeit (α_e , α_i , α_0). Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\alpha_e &= \frac{5}{2} \frac{k \tau_e p_e}{m_e} \frac{1}{1 + \omega_e^2 \tau_e^2}, \\ \alpha_i &= \frac{5}{2} \frac{k \tau_i p_i}{m_0} \frac{1 + \tau_0/\tau_{i0}}{1 + \omega_i^2 \tau_i^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{5}{2} \frac{k \tau_0 p_0}{m_0} + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \alpha_i ,\end{aligned}$$

τ bezeichnet die jeweiligen Stoßzeiten (siehe⁷), ω_i und ω_e die Zyklotronfrequenz der Protonen und Elektronen. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_e} &= 1,866 \nu_{ei}, \quad \nu_{ei} = \frac{4 \sqrt{2} \pi e^4 n_i \ln \Lambda}{3 \sqrt{m_e} (k T)^{3/2}}, \\ \frac{1}{\tau_i} &= 0,4 \nu_{ii}, \quad \nu_{ii} = \sqrt{\frac{2 m_e}{m_0}} \nu_{ei} .\end{aligned}$$

Bei allen Rechnungen wurden folgende Wirkungsquerschnitte zugrunde gelegt: (Index 0 ≡ Atom, e ≡ Elektron; i ≡ Ion):

$$\begin{aligned}Q_{00} &= 4 \pi \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ (l. c.¹)}, \\ Q_{0e} &= 130 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ (l. c.⁴)}, \\ Q_{0i} &= 70 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \text{ (l. c.⁸)}, \\ Q_{ie} &= \frac{e^4}{(k T)^2} \ln \Lambda \text{ (l. c.⁹)}\end{aligned}$$

$$\text{mit } A = \frac{3}{2 e^3} \sqrt{\frac{(k T)^3}{\pi n_i}} \text{ (l. c.⁵)} .$$

II. Der Bogen ohne Strahlung

Läßt man in der Energiebilanz (1) den Strahlungsterm $\text{Rad}(T)$ weg, so bleibt die sogen. ELENBAAS-HELLERSche Gleichung übrig:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \alpha(T) \frac{dT}{dr} + \sigma(T) E^2 = 0 . \quad (4)$$

Wir wollen uns zunächst (4) zuwenden (Bogenmodell I).

Bezeichnet man den Gesamtbogenradius mit R , dann ergeben sich aus (4) nach kurzer Rechnung für Bögen mit gleichen Randbedingungen folgende Beziehungen zwischen elektrischer Feldstärke E , Bogenstrom J , Leistung W und Temperaturprofil:

$$\begin{aligned}E(R) &= E(R=1)/R, \\ J(R) &= R \cdot J(R=1), \\ W(R) &= W(R=1), \\ T(r) &= T(R r/R) .\end{aligned} \quad (5)$$

(Voraussetzung für die Ableitung vorstehender Formeln ist, daß σ und α als reine Temperaturfunktionen vorliegen, was infolge der Rechnungen in² erfüllt ist.) Die Integration von (4) für ein bestimmtes $R (= 1)$ bedeutet also keine Beschränkung der Allgemeinheit, solange die Randbedingungen erhalten bleiben.

Die Integration der Diff.-Gl. (4) wurde durch ihre Umwandlung in eine Integralgleichung vorgenommen, die nach anfänglicher Vorgabe eines (linearen) radialen Temperaturprofils auf einer Digitalrechenmaschine iterativ gelöst wurde. Dieses Lösungsverfahren hat gegenüber anderen den Vorteil, daß es auch zur Integration von (1) benutzt werden kann, worauf noch eingegangen werden wird.

Setzt man $(dT/dr)_{r=0} = 0$ zur Gewährleistung physikalisch vernünftiger Lösungen und der Einfachheit halber $T(R) = 0$, dann ergeben sich als Rekursionsformeln (mit L als Iterationsindex):

$$\begin{aligned}T_{L+1}(r) &= T(0) - E_L^2 \int_0^r \left(\frac{\int_0^{r'} \varrho \sigma(T_L(\varrho)) d\varrho}{r' \alpha(T_L(r'))} \right) dr', \\ E_L^2 &= T(0) / \int_0^R \left(\frac{\int_0^{r'} \varrho \sigma(T_L(\varrho)) d\varrho}{r' \alpha(T_L(r'))} \right) dr' .\end{aligned}$$

(Die Anzahl der Iterationen wurde durch die Genauigkeitsforderung $|(T_{L+1} - T_L)/T_L| < 10^{-4}$ festgelegt. Um das Temperaturprofil für ca. 20 verschiedene Achsentemperaturen bis zu 10^5 °K zu errechnen, war auf einer IBM 7090 eine Maschinenzeit von ca. 30 min. nötig.)

Die mit dem strahlungsfreien Bogenmodell ($R = 1$ cm) für

$$p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2, \quad B_z = 20 \text{ kT}$$

⁶ A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **5a**, 12 [1950]; **6a**, 73 [1951].

⁷ W. FENEBERG, Die Transporteigenschaften eines teilweise ionisierten Plasmas im Magnetfeld, VIème Conf. intern. sur les Phénomènes d'Ionisation dans les Gases, Paris 1963.

⁸ W. L. FITE, R. F. STEBBINGS, D. G. HUMMER u. R. T. BRACKMAN, Phys. Rev. **119**, 663 [1960].

⁹ H. MAECKER, T. PETERS u. H. SCHENK, Z. Phys. **139**, 448 [1948].

gewonnenen Ergebnisse sind in den Abb. 3 und 4 dargestellt. Gegenüber einem Bogen ohne überlagertem Magnetfeld (Gesamtdruck $p = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$, $R = 1 \text{ cm}$) fällt der sehr unterschiedliche Verlauf des radialen Temperaturprofils und der Strom-Feldstärke-Charakteristik auf (Abb. 3 und 4). Die Ursache dafür ist in dem unterschiedlichen Verhalten der Wärmeleitfähigkeit für vollionisiertes Plasma zu suchen. Während beim Fehlen eines starken Magnetfeldes α gemäß der SPITZERSchen Formel $\sim T^{5/2}$ ansteigt, bleibt in unserem Falle α entweder konstant oder fällt sogar leicht ab. Daher muß sich, wie man bei genauer Diskussion von (4) sieht, der heiße Bogenkern einschnüren sowie die elektrische Feldstärke und damit die Leistungsaufnahme des Bogens reduzieren.

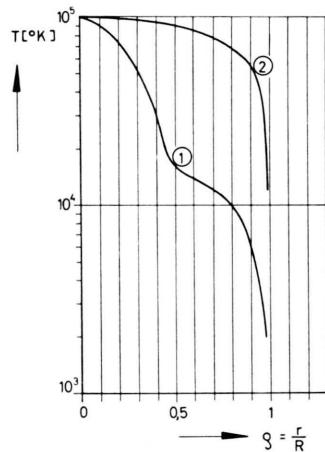


Abb. 3. Radiales Temperaturprofil für einen Bogen ohne (2) und mit (1) überlagertem Magnetfeld. $B_z = 20 \text{ kT}$, Außen- druck $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$.

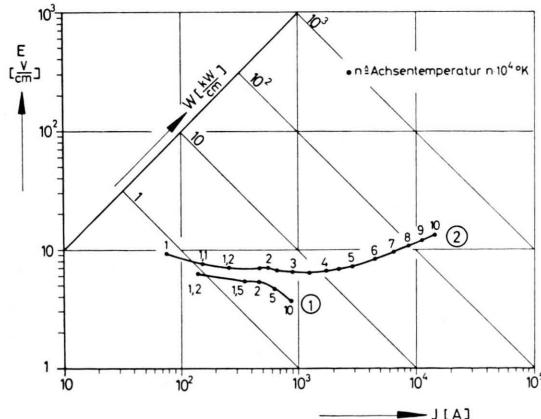


Abb. 4. Strom-Feldstärke-Charakteristik für einen strahlungsfreien Bogen ohne (2) und mit (1) überlagertem Magnetfeld. $B_z = 20 \text{ kT}$, Außen- druck $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$.

III. Der Bogen mit Strahlung

Wie eben gezeigt wurde, ist bei Vernachlässigung der Strahlungsverluste in der Energiebilanz die für einen Wasserstoffbogen in axialem Magnetfeld aufzuwendende elektrische Leistung für höhere Achsentemperaturen gering gegenüber einem Wasserstoffbogen mit gleicher Achsentemperatur ohne überlagertem Magnetfeld. Außerdem ist beim Bogen mit Magnetfeld das Gebiet starken Strahlungsaustausches (zw. 10^4 und $2 \cdot 10^4 \text{ }^{\circ}\text{K}$) weiter ausgedehnt als beim Bogen ohne Magnetfeld mit gleichem Gesamtbogenradius R und gleicher Achsentemperatur. Daher dürfte der Einfluß der Strahlung auf den hier betrachteten Bogen größer sein als auf einen vergleichbaren Bogen ohne überlagertes Magnetfeld.

Im folgenden wird zunächst grundsätzlich auf den Strahlungstransport eingegangen, danach die Linien- und Kontinuumsstrahlung der Wasserstoffatome behandelt und die Strahlungsenergiebilanz für die LYMAN-Serie allein aufgestellt. Zum Schluß werden die Ergebnisse mitgeteilt, die mit den beiden die Strahlung unterschiedlich berücksichtigenden Bogenmodellen erhalten wurden.

a) Grundlagen

Ein Lichtstrahl der Intensität J_ν im Frequenzintervall von ν bis $\nu + d\nu$ erfährt beim Durchlaufen einer Materieschicht der Dicke ds eine Intensitätsänderung dJ_ν gemäß der bekannten Formel

$$dJ_\nu = (\varepsilon_\nu - \alpha_\nu J_\nu) ds. \quad (6)$$

Dabei bedeuten ε_ν den Emissions- und α_ν den Absorptionskoeffizienten. Eine gegenüber (6) genauere Beschreibung des Strahlungstransports wäre mit einem unverhältnismäßig größeren Aufwand an numerischer Rechnung verbunden gewesen, daher soll hier davon abgesehen werden.

Für den Fall der Hohlraumstrahlung gilt der KIRCHHOFFSche Satz:

$$\varepsilon_\nu = \alpha_\nu B_\nu \quad (7)$$

$$\text{mit } B_\nu = \frac{2 h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\{h \nu / (k T)\} - 1}$$

als der Intensität der Hohlraumstrahlung. ε_ν ist im allgemeinen aus zwei Anteilen zusammengesetzt, den Koeffizienten für spontane ε_ν' und für die durch das Strahlungsfeld induzierte Emission ε_ν'' . Eine genauere Abschätzung zeigt jedoch, daß im Bogen ε_ν'' gegenüber ε_ν' vernachlässigt werden kann, also soll immer $\varepsilon_\nu \approx \varepsilon_\nu'$ gesetzt werden.

Die Anwendbarkeit von (7) geht über den idealisierten Fall des Hohlraumes hinaus, wenn die statistische Verteilung der angeregten Atome der BOLTZMANN-Formel (8) gehorcht, was man sich bei mikroskopischer Betrachtung von ε_v und α_v klar machen kann:

$$n_m = n_0 (g_m / Z_0) \exp \{ -E_m / (k T) \}; \quad (8)$$

n_m = Anzahl der (H-)Atome im Zustand mit der Hauptquantenzahl m und der Energie E_m (bezogen auf den Grundzustand mit $E_1 = 0$) pro Volumen, n_0 = Gesamtzahl der (H-)Atome pro Volumen, g_m = statistisches Gewicht des m -ten Zustandes, $Z_0 = \sum_i g_i \exp(-E_i/kT)$ = atomare Zustandssumme.

Da wir für unser Bogenmodell lokales thermisches Gleichgewicht annehmen, gilt (8), und es kann bei allen Rechnungen (7) zugrunde gelegt werden. Die Strömungsgleichung der Strahlung (6) kann deshalb umgeschrieben werden in

$$dJ_v = \alpha_v (B_v - J_v) ds. \quad (9)$$

Bei der Aufstellung der Strahlungsenergiebilanz kann man zwei Grenzfälle unterscheiden, je nachdem ob das Plasma in einem bestimmten Bereich des Bogens für die betreffenden Strahlungsorte optisch dick oder dünn ist:

$$\begin{aligned} \text{optisch dünn: } & \int \alpha_v ds \ll 1, \text{ d. h. } J_v \ll B_v, \\ \text{optisch dick: } & \int \alpha_v ds \gg 1, \text{ d. h. } J_v \approx B_v. \end{aligned}$$

Während die Einführung von optisch dünner Strahlung in die ELENBAAS-HELLERSche Diff.-Gl. (4) nur ein zusätzliches funktionales Glied ähnlich $\sigma(T) E^2$ verursacht, verwandelt die Berücksichtigung von Strahlungsabsorption sie in eine Integrodifferentialgleichung, da die Absorption eines Volumenelements von den Strahlungsaustauschprozessen des ganzen Bogens abhängt. Optisch dicke Strahlung spielt bei der Energiebilanz keine Rolle.

Bei der zu betrachtenden Strahlung handelt es sich vor allem um die Linien- und Kontinuumsstrahlung der H-Atome, während die Strahlung der H⁻-Ionen und die Zyklotronstrahlung ohne weiteres vernachlässigt werden können.

Zur Abschätzung der optischen Weglängen $\int \alpha_v ds$ wurde ein Gesamtbogenradius von ca. 1 – 2 cm angenommen, was die parallel durchgeführten Bogenexperimente in Garching nahelegten, und es wurden

zunächst die ohne Strahlungsberücksichtigung gewonnenen Ergebnisse (radiales Temperaturprofil und elektrische Feldstärke) näherungsweise benutzt.

b) Linienstrahlung und Kontinuumsstrahlung der H-Atome

Bezeichnet man mit A_{mn} die Übergangswahrscheinlichkeit für spontane Emission vom Energiezustand m in den Zustand n des Atoms und mit ν_{mn} die Frequenz der dabei ausgesandten Strahlung, so ergibt sich für den zugehörigen Emissionskoeffizienten ϵ'_{mn} :

$$\begin{aligned} \epsilon'_{mn} &= \frac{1}{4\pi} A_{mn} n_m h \nu_{mn} \\ &= \frac{1}{4\pi} A_{mn} h \nu_{mn} \frac{n_0}{Z_0} g_m \exp \left\{ -\frac{E_m}{kT} \right\}. \end{aligned}$$

Die Größen A_{mn} wurden ¹⁰, die Werte von E_m und ν_{mn} ¹¹ entnommen.

Vernachlässigt man die Absorption der von außen auf das Volumenelement treffenden Strahlung, dann gilt der Ausdruck

$$L'_{mn} = 4\pi \epsilon'_{mn}$$

die pro Volumen- und Zeiteinheit verlorengegangene Strahlungsenergie an. L'_{mn} stellt also eine obere Grenze für den Strahlungsverlust dar.

L'_{mn} der wichtigsten Linien ist für ausgewählte Temperaturzonen des betrachteten Bogens in Tab. 1 angegeben. Außerdem findet man noch L'_K für die Kontinuumsstrahlung der H-Atome und zum Vergleich mit dem strahlungsfreien Bogenmodell errechnete elektrische Leistungen σE^2 für drei verschiedene Achsentemperaturen.

Wie Tab. 1 zeigt, liegt L'_{mn} der ersten Glieder der LYMAN-Serie für $10^4 \text{ K} < T < 3 \cdot 10^4 \text{ K}$ teilweise beträchtlich über σE^2 oder in dessen Größenordnung. Es wurde deshalb notwendig, die Größe der zugehörigen Absorptionskoeffizienten zu ermitteln. Die Emission und Absorption der Spektrallinien erfolgt nämlich nicht streng monochromatisch, sondern sie weist ein Profil auf, das im wesentlichen erstens durch DOPPLER-Effekt infolge der ungeordneten thermischen Bewegung der strahlenden Atome und zweitens durch STARK-Effekt, hervorgerufen von elektrischen Mikrofeldern der Ionen und Elektronen (Druckverbreiterung) zustande kommt. Demgegenüber ist die Linienaufspaltung durch ZEEMAN-Effekt

¹⁰ A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, Verlag Springer, 2. Auflage, Berlin 1955.

¹¹ E. W. SCHPOLSKI, Atomphysik I, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

$T \text{ in } 10^4 \text{ } ^\circ\text{K}$	0,8	1,2	1,4	2,0	2,5	10,0
2 → 1	54	3600	5710	1480	463	1
3 → 1	1	185	381	156	61	
4 → 1		42	95	47	19	
5 → 1		16	37	20	9	
6 → 1		8	19	11	5	
3 → 2		23	47	19	7	
4 → 2, 3		7	16	8	3	
5 → 2, 3, 4		3	7	4	2	
6 → 2, 3, 4, 5			4	2		
Kontinuum (L_K)		67	206	184	109	4
$\sum_{n=1} L_{mn} + L_K$		100	279	217		
$\sum_{\sigma E^2} L_{mn} + L_K$				676		5
$(T(0) = 2 \cdot 10^4 \text{ } ^\circ\text{K})$		900		2500		
$(T(0) = 10^5 \text{ } ^\circ\text{K})$		390		1100		7700

Tab. 1. Zusammenstellung von $L'_{mn} = 4\pi \varepsilon'_{mn}$ der wichtigsten Linien und des Kontinuums von Wasserstoff und Vergleich mit der für den Bogen ohne Strahlungsverluste ($R = 1 \text{ cm}$) ermittelten Jouleschen Leistung σE^2 [Watt/cm^3]. ($m \rightarrow n, k, l, \dots \triangleq$ Summe der Strahlungsübergänge vom Niveau mit der Hauptquantenzahl m zu den Niveaus mit $n, k, l, \dots, T(0)$ = Achsentemperatur).

infolge des starken überlagerten Magnetfeldes, die die Größenordnung der LARMOR-Frequenz aufweist, klein. Wegen der Gültigkeit des KIRCHHOFFSchen Satzes (7) für unseren Bogen ist das Emissionsgleich dem Absorptionsprofil. Ferner bleibt die Emission der Linie insgesamt erhalten.

Bezeichnet man mit $\Delta\nu$ den Frequenzabstand von der Linienmitte und mit m_0 die Atommasse, dann lautet nach ¹⁰ die Intensitätsverteilung $J(\Delta\nu)$ der emittierten Strahlung für reine DOPPLER-Verbreiterung [mit der Normierung $\int J(\Delta\nu') d\nu' = 1$]:

$$J(\Delta\nu) = \frac{\exp\{-(\Delta\nu/\Delta\nu_D)^2\}}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} \text{ mit } \Delta\nu_D = \frac{v}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

Die Druckverbreiterungsprofile der Linien Ly _{α} , Ly _{β} , H _{α} – H _{γ} liegen mit der Ionen- bzw. Elektronendichte n_i als Parameter als Funktion von $\alpha = \Delta\lambda[\text{\AA}]/F$ vor, wobei $F = 2,61 \cdot e \cdot n_i^{2/3}$ [el. stat. cgs cm^{-2}] die sogenannte Normalfeldstärke ist ¹².

Unter den Bedingungen unseres Bogens wurde das Verhältnis von DOPPLER- zu Druckverbreiterungs-halbwertsbreite $\geqq 7$ für Ly _{α} , < 1 für Ly _{β} und $\ll 1$ für H _{α} . Um das tatsächliche ε_ν - bzw. \varkappa_ν -Profil [$\equiv J_R(\Delta\nu)$] zu erhalten, wurde für Ly _{α} und Ly _{β} das gegebene Druckverbreiterungsprofil [$\equiv J_{Dr}(\Delta\nu)$] mit dem DOPPLER-Profil [$\equiv J_{Do}(\Delta\nu)$] numerisch gefaltet:

$$J_R(\Delta\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{Dr}(\Delta\nu') J_{Do}(\Delta\nu - \Delta\nu') d(\Delta\nu').$$

Es ergab sich, daß im Bereich des stärksten Strahlungsaustausches das resultierende Profil von ε_ν bzw. \varkappa_ν durch den einfachen Ansatz

$$J_R(\Delta\nu) \approx J_A(\Delta\nu) = \frac{1}{2a} \exp\left\{-\frac{|\Delta\nu|}{a}\right\}$$

approximiert werden kann, wobei a ungefähr die Halbwertsbreite von $J_R(\Delta\nu)$ darstellt und in Einheiten der für die DOPPLER-Verbreiterung charakteristischen Größe $\Delta\nu_D$ ausgedrückt wird.

Die detaillierte Bestimmung von $\varkappa_{mn}(\Delta\nu)$ zeigte, daß im Rahmen der Bogendimensionen (die Achsenrichtung selbstverständlich ausgeschlossen) für alle Linien außerhalb der LYMAN-Serie das gesamte Bogenplasma als optisch dünn angesehen werden kann. Für H _{α} gilt diese Aussage weniger gut. Bei den LYMAN-Linien sind die Absorptionsverhältnisse bedeutend komplizierter, so daß eine genauere Untersuchung des von ihnen verursachten Strahlungsverlustes notwendig wurde (vgl. III c).

Die Kontinuumsstrahlung der H-Atome, entstanden durch frei-frei-(Bremsstrahlung) und frei gebunden-Übergänge der Elektronen, besteht nach ⁴ aus einem ziemlich frequenzunabhängigen und einem stark frequenzabhängigen Anteil [im folgenden mit (1) bzw. (2) indiziert], die an der Grenzfrequenz ν_G zusammenstoßen. ν_G errechnet sich, indem die Energiedifferenz im Termschema von der Ionisierungsgrenze (E_i) bis zu dem Term, der den Abschluß einer hinreichend dichten Termfolge bildet, gleich $h\nu_G$ gesetzt wird.

$$\varepsilon_\nu^{(1)'} = 6,36 \cdot 10^{-47} \frac{n_e n_i}{V/kT} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sec} \cdot \text{sterad}} \right].$$

Der Gesamtstrahlungsverlust des frequenzunabhängigen Teils des Kontinuums $L_K^{(1)}$ beträgt dann mit $\nu_G = (E_i - E_G)/h$:

$$L_K^{(1)'} = \int_0^{\nu_G} 4\pi \varepsilon_\nu^{(1)'} d\nu = 5,3 \cdot 10^6 \frac{(n_i/10^{16})^2}{V/T/10^4} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{ sec}} \right]. \quad (10)$$

Die Wahl von ν_G ist wegen $L_K^{(1)'} \ll L_K^{(2)'}$ nicht kritisch [vgl. (10) mit (11)].

¹² H. GRIEM, A. C. KOLB u. K. Y. SHEN, Stark Broadening of Hydrogen Lines in Plasma, NRL Report 5455 [1960].

$$\varepsilon_r^{(2)'} = 6,36 \cdot 10^{-47} \frac{n_i n_e}{V k T} \exp \left\{ -\frac{h \nu}{k T} \right\} \cdot \left\{ \exp \left\{ \frac{h \nu_G}{k T} \right\} + \frac{2 E_i}{k T} \sum_n \exp \left\{ \frac{E_i - E_n}{k T} \right\} \right\} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sec} \cdot \text{sterad}} \right]$$

[$h \nu_G \leqq (E_i - E_n) \leqq h \nu$],

$$L_K^{(2)'} = \int_{\nu_G}^{\infty} 4 \pi \varepsilon_r^{(2)'} d\nu = 1,42 \cdot 10^7 \frac{(n_i/10^{16})^2}{V T/10^4} \left[\frac{T}{10^4} + 37,4 \right] \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sec}} \right]. \quad (11)$$

Die Bestimmung des Absorptionskoeffizienten für die Frequenz maximaler Emission (Kante des LYMAN-Kontinuums) zeigte, daß die Absorption im Bogen sehr gering ist. Daher gibt die Summe von (10) und (11) ungefähr den Energieverlust pro Volumen- und Zeiteinheit durch Kontinuumsstrahlung an (vgl. L_K in Tab. 1).

c) Die Berechnung der Strahlungsenergiebilanz für die Lyman-Serie

Betrachtet man ein (Einheits-) Volumenelement am Ort mit dem Radius r , so lautet seine Strahlungsenergiebilanz über alle Richtungen ω für eine Linie (L):

$$\begin{aligned} \text{Rad}_L(r) &= \int_{\omega} \left(\int_L \varepsilon_r(r) d\nu \right) d\omega \\ &\quad - \int_{\omega} \left(\int_L \chi_r(r) J_r(r, \omega) d\nu \right) d\omega \quad (12) \\ &= 4 \pi \varepsilon_L(r) - \int_L \left(\chi_r(r) \int_{\omega} J_r(r, \omega) d\omega \right) d\nu. \end{aligned}$$

Um die zur numerischen Lösung von (12) benötigte Rechenmaschinenzeit in Grenzen zu halten, wurden nur die LYMAN-Linien α und β betrachtet. Diese weisen die bei weitem größten Emissionskoeffizienten der LYMAN-Linie auf (vgl. Tab. 1), außerdem kommt durch ihre approximative Behandlung eine Unsicherheit in die Gesamtrechnung, so daß keine weiteren Linien berücksichtigt wurden.

Ferner wurde eine Hälfte des (symmetrischen) frequenzabhängigen Profils von Emissions- und Absorptionskoeffizient durch eine fünfstufige Treppenkurve angenähert. Für jedes dieser Frequenzintervalle und für bestimmte Richtungen wurde die Strahlungstransportgleichung vom Bogenrand bis zum jeweiligen Aufpunkt, an dem Rad_L berechnet werden sollte, integriert. Die Richtungen ergaben sich aus der angenäherten Bildung des über dem vollen Raumwinkel genommenen Integralmittelwertes der Strahlungsintensität

$$\bar{J}_{L,i}(r) = \int_{\omega} J_{L,i}(r, \omega) d\omega, \quad J_L = \int_L J_r d\nu,$$

der Index i bezeichnet das jeweilige Frequenzintervall. Es wurde dazu ein von GAUSS stammendes Ver-

fahren verwendet, das die Integration folgendermaßen ersetzt ¹⁰:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^s a_k f(x_k).$$

In unserem Fall wurden zur Mittelung 32 Richtungen benutzt, was sich infolge der Bogensymmetrie auf die Bestimmung der Strahlungsintensität aus nur acht verschiedenen Richtungen reduzierte. (Die Rechnung zeigte einen ziemlich glatten Intensitätsverlauf in Abhängigkeit von der Richtung an, so daß acht Richtungen ausreichen dürften.)

Für die Strahlungsenergiebilanz (12) ergab sich somit

$$\text{Rad}_L(r) = 4 \pi (\varepsilon_L(r) - 2 \sum_{i=1}^5 \chi_{L,i}(r) \bar{J}_{L,i}(r)) \quad (13)$$

mit $L = \text{Ly}\alpha$ bzw. $\text{Ly}\beta$.

Einen Überblick über das Verhältnis von

$$L_L = 4 \pi \cdot \varepsilon_L \text{ zu } \text{Rad}_L$$

erlaubt Abb. 5 [$T(0) = 10^5 \text{ K}$, $R = 2 \text{ cm}$].

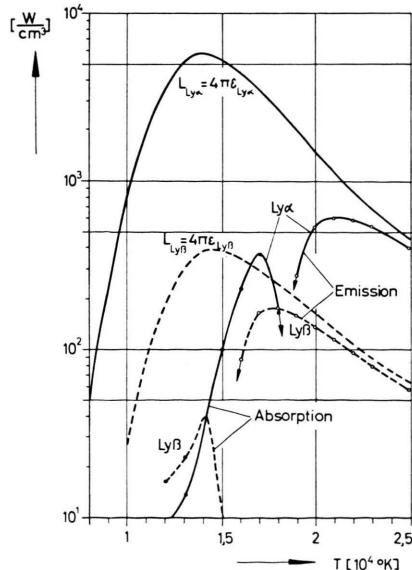


Abb. 5. Strahlungsenergiebilanz pro Volumen im Bogen für die Linien LYMAN α und β . Achsentemperatur = 10^5 K , Bogenradius $R = 2 \text{ cm}$, $B_z = 20 \text{ kT}$, Außendruck $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$.

IV. Der Einfluß der Strahlung auf die Energiebilanz des Bogens

Solange die Strahlungsabsorption eines Volumenelements vernachlässigt werden kann, lautet

$$\text{Rad}(T) = 4\pi \sum_L \varepsilon_L(T) + L_K(T). \quad (14)$$

In dieser Form wurde $\text{Rad}(T)$ für Volumenelemente mit einer Temperatur von mehr als $2,5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ verwendet. Für $T < 2,5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ wurde die LYMAN-Serie bei der Summation in (14) ausgeschlossen, was durch die Bestimmung von $\text{Rad}_L(T)$ nach (13) für Ly α nahegelegt wurde. Während im Bogenmodell II die LYMAN-Serie unterhalb von $2,5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ überhaupt nicht berücksichtigt wurde, wurde beim Bogenmodell III Rad_L gemäß (13) für Ly α und Ly β an maximal 15 Aufpunkten gebildet und dazwischen linear interpoliert. Aufpunkte mit Temperaturen unterhalb von ca. $1,1 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ lohnen nicht, da einerseits im Linienkern wegen des großen Absorptionskoeffizienten kein Strahlungstransport mehr stattfindet und andererseits wegen des nahezu DOPPLER-Absorptionsprofils in diesem Temperaturbereich keine Absorption der aus heißeren Zonen stammenden Strahlung, wo das Emissionsprofil wesentlich breiter ist, erfolgt.

Die Energiebilanz mit Strahlung wurde wie im Fall ohne Strahlung in eine Integralgleichung umgewandelt und iterativ gelöst. Während sich die

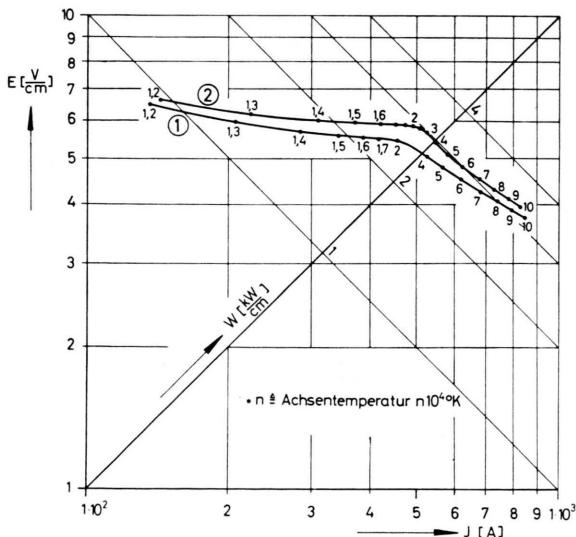


Abb. 6. Strom-Feldstärke-Charakteristik für einen Bogen im äußeren Magnetfeld ohne (1) und mit (2) Strahlung (Modell II).
 $R = 1 \text{ cm}$, $B_z = 20 \text{ kT}$, Außendruck $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$.

Rechenmaschinenprogramme für die Bogenmodelle I und II nicht wesentlich unterscheiden, ist das Programm für das Modell III bedeutend umfangreicher und zeitlich aufwendiger, da zusätzlich die Strahlungstransportgleichungen gelöst werden müssen.

Weil für die Lösungen von (1) keine einfachen Transformationsgesetze analog zu (5) existieren, wurde die Integration von (1) für zwei verschiedene Gesamtadien, $R = 1$ und 2 cm , vorgenommen. Auf Grund der bisherigen Bogenexperimente in Garching stellt $R = 2 \text{ cm}$ schon eine obere Grenze dar. Die sich für das Bogenmodell II ergebende Strom-Feldstärke-Charakteristik ist für $R = 1 \text{ cm}$ in Abb. 6 zu sehen, in der zum Vergleich auch die ohne Strahlungsberücksichtigung (Bogenmodell I) gewonnene Charakteristik eingezeichnet ist.

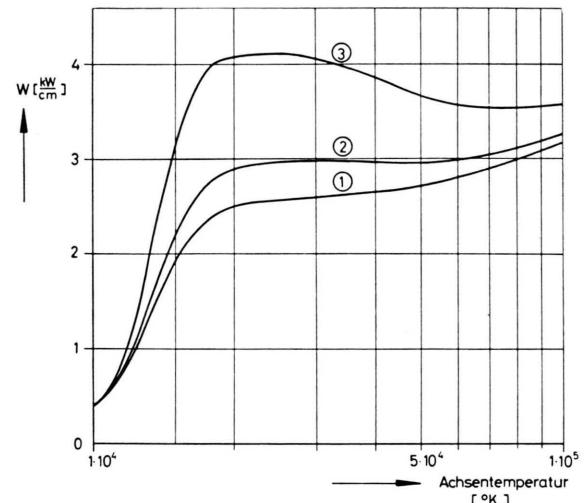


Abb. 7. Abhängigkeit der Bogenleistung von Achsentemperatur und Radius; ohne (1) und mit Strahlung (Modell II) für $R = 1 \text{ cm}$ (2), $R = 2 \text{ cm}$ (3); $B_z = 20 \text{ kT}$, Außen druck $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$.

In Abb. 7 ist die pro Säulenlänge aufzubringende elektrische Leistung W über der Achsentemperatur aufgetragen, und zwar für den strahlungsfreien Bogen, bei dem W unabhängig von R ist, sowie für den Bogen II mit $R = 1 \text{ cm}$ und 2 cm . Bei festgehaltener Achsentemperatur ist die durch die Strahlung bedingte Leistungserhöhung für $R = 2 \text{ cm}$ etwa viermal größer als für $R = 1 \text{ cm}$, was dem Verhältnis der Bogenquerschnitte bzw. -volumina entspricht. Während die Leistungskurve für den strahlungsfreien Bogen monoton mit der Achsentemperatur anwächst, weisen die beiden übrigen Kurven ein relatives Maximum auf, d. h. bei festgehaltenem R kann

die Leistung mit zunehmender Achsentemperatur zurückgehen. Man kann dazu vielleicht bemerken, daß in praxi die Einstellung einer höheren Achsentemperatur mit einer Verbreiterung des Bogens verknüpft ist, wodurch immer ein steigender Verbrauch elektrischer Leistung zustande kommt. (Die Gardiner Experimente scheinen nicht dagegen zu sprechen.)

Da der Übergang vom Bogenmodell II und III mit einem erheblich größeren Aufwand an Rechenmaschinenzeit verbunden war, wurde diese Rechnung nur für wenige Achsentemperaturen durchgeführt (vgl. Tab. 2).

Achsen-temp. $T(0)$	R cm	Modell	E V/cm	J A	W kW/cm
$2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$	1	I	5,46	458	2,50
		II	5,84	493	2,88
		III	5,91	530	3,13
	2	I	2,73	915	2,50
		II	3,44	1177	4,05
		III	3,48	1337	4,65
$10^5 \text{ }^\circ\text{K}$	1	I	3,75	843	3,16
		II	3,95	828	3,27
		III	1,88	1686	3,16
	2	I	2,30	1555	3,58
		II	2,29	1577	3,61
		III			

Tab. 2. Vergleich der mit den verschiedenen Bogenmodellen gewonnenen Ergebnisse ($B_z = 20 \text{ kT}$, Außendruck $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$).

Analog zu den Ergebnissen des Bogenmodells II ist der Einfluß der LYMAN-Strahlung auf die Energiebilanz bei einer Achsentemperatur von $2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ bedeutend größer als bei $5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ und erst recht bei $10^5 \text{ }^\circ\text{K}$, da mit steigender Achsentemperatur (R sei fest!) die Ausdehnung der stark strahlenden Schichten abnimmt. Für Achsentemperaturen $> 5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ dürfte also das einfachere Bogenmodell II dem Modell III kaum unterlegen sein.

Wie schon erwähnt, wurde beim Modell III das Emissions- und Absorptionskoeffizientenprofil für Ly_α und Ly_β durch eine Treppenkurve angenähert. Der durch die Treppenkurve nicht mehr erfaßte Teil der Flügel des Profils machte für Ly_α 0,5% und für Ly_β 3% der gesamten Linienemission aus. Dem entspricht nach Tab. 1 eine maximale Strahlungsleistung von ca. 30 W/cm^3 für Ly_α und ca. 10 W/cm^3 für Ly_β . Setzen wir voraus, daß das Bogenplasma für die Strahlung des nicht erfaßten Profilanteils optisch dünn wäre, und berücksichtigen wir die Aus-

dehnung der stark strahlenden Bogenzonen, dann dürften für $R = 1 \text{ cm}$ etwa 40 W pro cm Säulenlänge eine obere Grenze für die zusätzlich aufzubringende elektrische Leistung darstellen. (Für $R = 2 \text{ cm}$ entsprechend ca. 150 W/cm .) Dieser Fehler ist also im Vergleich mit der Gesamtleistung unerheblich.

In der radialen Temperaturverteilung wirkt sich der Strahlungsverlust erstens dahingehend aus, daß in dem Bogenbereich mit starker Abstrahlung der Temperaturgradient und damit der Verlust durch Wärmeleitung kleiner wird, um so in der lokalen Energiebilanz [vgl. (1)] die Strahlungsverluste teilweise auszugleichen. Zweitens wird durch Erhöhung von E mehr elektrische Energie $\sigma(T) E^2$ zugeführt, was gleichzeitig einen steileren Temperaturabfall in Achennähe ermöglicht (vgl. Abb. 8).

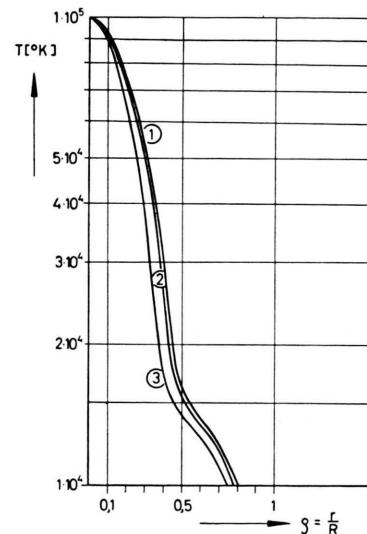


Abb. 8. Radiales Temperaturprofil eines Bogens im äußeren Magnetfeld; ohne (1) und mit Strahlung (Modell II) für $R = 1 \text{ cm}$ (2), $R = 2 \text{ cm}$ (3); $B_z = 20 \text{ kT}$, Außendruck $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$.

V. Zusammenfassung

Durch die Überlagerung eines zylindersymmetrischen Wasserstoffbogens mit einem starken, axial gerichteten Magnetfeld wird eine bedeutende Reduzierung der radialem Wärmeleitfähigkeit für vollionisiertes Plasma erreicht. Das hat zur Folge, daß für Achsentemperaturen oberhalb ca. $2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ die elektrische Leistung um Größenordnungen geringer ist als beim Bogen ohne überlagertes Magnetfeld. Der Einfluß der Strahlung auf die Energiebilanz ist

trotzdem gering. So wird z. B. für einen Bogen mit einer Achsentemperatur von 10^5 °K, einem Radius von 2 cm und einem Außendruck von $5 \cdot 10^4$ dyn/cm² durch das Einschalten eines äußeren Magnetfeldes von 20 kT die Leistung von ca. 200 kW/cm auf ca. 3,5 kW/cm vermindert, dabei betragen die Strahlungsverluste ca. 0,5 kW/cm.

Für die Anregung dieser Arbeit sowie das stetige Interesse und die Hilfe bei ihrer Durchführung möchte

ich Herrn Prof. Dr. A. SCHLÜTER und Herrn Prof. Dr. R. WIENECKE herzlich danken. Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des Instituts für Plasmaphysik in Garching bei München, die mir Unterstützung zukommen ließen, vor allem Herrn Dr. W. KEGEL und Herrn Dipl.-Phys. FISSEK. Besonderen Dank schulde ich Fräulein WALDHERR für die Anfertigung der Abbildungen.

Die vorstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.